*08.06.2020*

*Дисциплина – «Элементы высшей математики»*

**Задание: Выписать в тетрадь все примеры, разобрав их. Решить задания для самостоятельной работы.**

**Практическая работа**

## Тема: «Кривые второго порядка. Парабола»

**Цель:** формирование умений составлять уравнения параболы, исследовать форму и расположение параболы;

**Методические указания и теоретические сведения к практической работе**

**Парабола** — [геометрическое место точек](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BE_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%B5%D0%BA), равноудалённых от данной прямой (называемой  [директрисой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) параболы) и данной [точки](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) (называемой [фокусом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%81%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) параболы).

Наряду с [эллипсом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D1%81) и [гиперболой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), парабола является [коническим сечением](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%81%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Она может быть определена как коническое сечение с ***единичным*** [***эксцентриситетом***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D1%86%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82).

Точка параболы, ближайшая к её директрисе, называется ***вершиной***этой параболы. Вершина является серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

**Каноническое уравнение параболы в**[**прямоугольной**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82)[**системе координат**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82)**:**

~\textstyle y^2=2px, p>0 (или ~\textstyle x^2=2py, если поменять местами оси).

Число *p* называется ***фокальным параметром***, оно равно расстоянию от фокуса до директрисы. Поскольку каждая точка параболы равноудалена от фокуса и директрисы, то и вершина — тоже, поэтому она лежит между фокусом и директрисой на расстоянии \frac{p}{2} от обоих.

### Парабола, заданная квадратичной функцией

### [Квадратичная функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) ~y=ax^2+bx+c при ~a\neq 0 также является уравнением параболы и графически изображается той же параболой, что и ~y=ax^2, но в отличие от последней имеет вершину не в начале координат, а в некоторой точке A, координаты которой вычисляются по формулам:

~x_\textrm{A}=-\frac{b}{2a},\;y_\textrm{A}=-\frac{D}{4a}, где  D=b^2-4ac — [дискриминант](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D1%82) квадратного трёхчлена.

### Общее уравнение параболы

### В общем случае парабола не обязана иметь ось симметрии, параллельную одной из координатных осей. Однако, как и любое другое коническое сечение, парабола является [кривой второго порядка](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0) и, следовательно, её уравнение на плоскости в декартовой системе координат может быть записано в виде квадратного многочлена:

Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. 

Если кривая второго порядка, заданная в таком виде, является параболой, то составленный из коэффициентов при старших членах [дискриминант](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D1%82) B^2-4AC равен нулю.

**Пример 1.**Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением y^{2}=8x.

Решение. Из данного канонического уравнения параболы следует, что 2p=8, т.е. p=4,откуда {p}/{2}=2.Значит, точка  F(2;0)- фокус параболы, а  x=2 — уравнение ее директрисы.

**Пример 2.**Составить каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты  (0;-3).

Решение. Согласно условию, фокус параболы расположен на отрицательной полуоси Oy , т.е. ее уравнение имеет вид: x2= - 2py

Так как -{p}/{2}=-3, то p=6, откуда 2p=12.Итак, уравнение параболы есть x^{2}=-12y, а уравнение ее директрисы y=3.

**Пример 3.**Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной оси *Ох* и проходящей через точку  A(-3;-6).

Решение. Из условия заключаем, что уравнение параболы следует искать в виде y^{2}=-2px.

Так как точка A(-3;-6) принадлежит параболе , то ее координаты удовлетворяют этому уравнению: 36= - 2р\*(-3); 2р=12.

Итак, уравнение параболы имеет вид y^{2}=-12x.

**Пример 4.** Парабола симметрична относительно оси *Ox*, проходит через точку

*A*(4, -1), а вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.

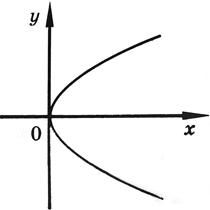
*Решение.*Так как парабола проходит через точку *A*(4, -1) с положительной абсциссой, а ее осью служит ось *Ox*, то уравнение параболы следует искать в виде *y*2 = 2*px*. Подставляя в это уравнение координаты точки *A*, будем иметь

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01595.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02595.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03595.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04595.JPG

искомым уравнением будет

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01596.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02596.JPG

Эскиз этой параболы показан на рисунке



**Пример 5.** Парабола *y*2 = 2*px* проходит через точку *A*(2, 4). Определить ее параметр *p*.

*Решение.* Подставляем в уравнение параболы вместо текущих координат координаты точки *A* (2, 4). Получаем

42 = 2*p*\*2; 16 = 4*p*; *p* = 4.

**Пример 6.** Привести к каноническому (простейшему) виду уравнение параболы

*y* = 2*x*2 + 4*x* + 5 и найти координаты ее вершины.

*Решение.* Уравнение *y* = 2*x*2 + 4*x* + 5 преобразуем, выделив в правой части полный квадрат:

*y* = 2(*x*2 + 2*x*) + 5,

*y* = 2[(*x* + 1)2 - 1] + 5,

*y* = 2(*x* + 1)2 + 3,

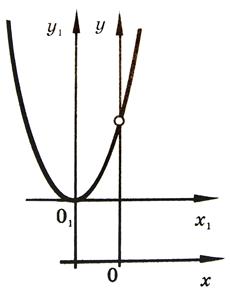
*y* - 3 = 2(*x* + 1)2;

пусть теперь *x*1 = *x* + 1, *y*1 = *y* - 3. Из сравнения с формулами

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01638.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02638.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03638.JPG

координаты нового начала: *x*0 = -1; *y*0 = 3. Уравнение параболы примет вид http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01643.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02643.JPG

Эскиз параболы показан на рисунке.



**Пример 7.** Упростить уравнение параболы *y* = *x*2 - 7*x* + 12, найти координаты ее вершины и начертить эскиз кривой.

*Решение.* Выделим в правой части уравнения *y* = *x*2 - 7*x* + 12 полный квадрат по способу, указанному выше в [задаче](http://www.neslozhno.ru/wyou.html), и получим

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01635.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02635.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03635.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04635.JPG

или

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01636.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02636.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03636.JPG

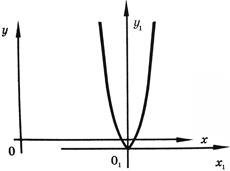
Положим

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01637.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02637.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03637.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04637.JPG

Отсюда из сравнения с формулами

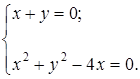
http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01638.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02638.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03638.JPG

координаты нового начала, т. е. вершины параболы, будут http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01639.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02639.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03639.JPG. После переноса начала координат в точку http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01640.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02640.JPGуравнение параболы примет наиболее простой вид http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01641.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02641.JPG. Эскиз кривой представлен на рисунке.



**Пример 8.** Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image693.png и окружности http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image695.png и симметрична относительно оси http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image662.png .

**Решение.** Найдем точки пересечения заданных линий, решив совместно их уравнения:



В результате получим два решения http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image700.png и http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image702.png . Точки пересечения http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image704.png и http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image706.png . Так как парабола проходит через точку http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image704.png и симметрична относительно оси http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image662.png , то в этой точке будет находиться вершина параболы. Поэтому уравнение параболы имеет вид http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image710.png . Так как парабола проходит через точку http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image706.png , то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы: http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image713.png , http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image715.png , http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image717.png

Итак, уравнением параболы будет http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image719.png , уравнение директрисы http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image401.png или http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image722.png , откуда http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image724.png

**Ответ.** http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image719.png ; http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image724.png

**Пример 9.** Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image728.png этой параболы, зная, что пролет арки равен http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image730.png, а высота http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image732.png

*Решение.*Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы вершина параболы (мостовой арки) находилась в начале координат, а ось симметрии совпадала с отрицательным направлением оси http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image662.png . В таком случае каноническое уравнение параболы имеет вид http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image735.png , а концы хорды арки http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image737.png и http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image739.png . Подставив координаты одного из концов хорды (например, http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image741.png ) в уравнение параболы и решив полученное уравнение относительно http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image728.png , получим http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image744.png

**Ответ.** http://konspekta.net/studopediaorg/baza7/1331111520286.files/image744.png

***Задания для самостоятельной работы***

**Задание 1.**

а) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением *у2=16р*.

б) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением

*у2= -18р.*

**Задание 2.**

**а)** Составить каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты  (0; -7).

**б)** Составить каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты  (0; 4).

**Задание 3.**

а) Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной относительно оси *Ох* и проходящей через точку  А (-2; - 4). Начертить эскиз данной кривой.

б) Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной относительно оси *Ох* и проходящей через точку  А (3; - 5). Начертить эскиз данной кривой.

**Задание 4.**

**а)** Парабола *y*2 = 2*px* проходит через точку *A*(4; 8). Определить ее параметр *p*.

**б)** Парабола *y*2 = **-**2*px* проходит через точку *A*(-4; -8). Определить ее параметр *p*.

**Задание 5.**

**а)** Привести к каноническому (простейшему) виду уравнение параболы *y* = 2*x*2 + 8*x* + 5 и найти координаты ее вершины. Начертить эскиз данной кривой.

б) Привести к каноническому (простейшему) виду уравнение параболы *y* = 4*x*2 + 16*x* +10 и найти координаты ее вершины. Начертить эскиз данной кривой.

**Задание 6.**  а) Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой *2х + 2у=0*  и окружности *х2+у2 – 4х=0*  и симметрична относительно оси *Оу.*

б) Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой *3х + 3у=0*  и окружности *2х2 + 2у2 - 8х=0* и симметрична относительно оси *Ох*.

**Задание 7. а)** Арка здания имеет форму параболы. Определить параметр ***р*** этой параболы, зная, что пролет арки равен 12 м, а высота 4 м.

б) Арка дома имеет форму параболы. Определить параметр ***р*** этой параболы, зная, что пролет арки равен 14 м, а высота 6 м.